

V Powiatowa Olimpiada Matematyczna
Etap II(10.01.09 – 20.02.09)

Klasy I

1. Rozwiąż równanie w liczbach całkowitych:
 $-3x + xy + 4y = 24.$

$$[x-1] = \left[\frac{x+2}{2} \right]$$

2. Rozwiąż równanie:
 $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .
3. Dany jest trójkąt równoramienny o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech M będzie środkiem boku AB. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej CM przecina $\angle AMC = \angle BMP.$
 bok BC w punkcie P. Dowieść, że
4. Udowodnij, że dla liczb a, b, c , które są długościami boków trójkąta, prawdziwa jest nierówność

$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < 1$$

5. Wyznacz wszystkie trójki (x, y, z) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 23 \\ x + 2y + 4z = 22 \end{cases}$$

Klasy II

1. Dla liczb dodatnich $0 < a < b$ definiujemy liczby a_1, a_2, a_3, \dots oraz b_1, b_2, b_3, \dots rekurencyjnie:

Oblicz stosunek długości przedziałów (a_{n+1}, b_{n+1}) i (a_n, b_n) w zależności od

$$\frac{b_n}{a_n}.$$

2. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i

$$\begin{cases} a_1 = a, & b_1 = b \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

AC trójkąta ABC. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i AC, przy czym czworokąt CLPK jest równoległobokiem. Dowieść, że

$$\frac{|AE|}{|EL|} = \frac{|BD|}{|DK|}$$

3. Podaj wzór rekurencyjny ciągu:
 $1, 2, 0, 3, -1, 4, -2, \dots$

4. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x}{[x]} - \frac{1}{x} + \frac{[x]}{x} = 2$$

5. Narysuj wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

Klasy III

1. W pewnej firmie płace 20% pracowników wzrosły o 50zł. O ile złotych wzrosła średnia płaca w tej firmie?
2. Punkt wspólny przekątnych jednej ze ścian sześciianu połączono odcinkami z wierzchołkami ściany przeciwległej. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi otrzymanego ostrosłupa.
3. Podaj ilustrację graficzną rozwiania równania:
 $2 \log_y^2 x - 3 \log_y x = -1.$
4. Losowo ustawiamy w rzędzie 2 dziewczyny i 3 chłopców. Jakie jest prawdopodobieństwo, tego że dziewczyny nie stoją obok siebie?
5. Oblicz:

$$\log(\cos 40^0 + \sin 40^0 \operatorname{tg} 20^0)$$