V Powiatowa Olimpiada Matematyczna
Etap I (01.12.08 – 09.01.09)

Klasy I

1. Jakie to działanie?
   PÓŁ · PÓŁ = ĆWIERĆ

2. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań
   $$\begin{cases} a^3+3ab^2+3ac^2-6abc=1 \\ b^3+3ba^2+3bc^2-6abc=1 \\ c^3+3ca^2+3cb^2-6abc=1 \end{cases}$$

3. Czy liczba
   $$a=\sqrt{\sqrt{5}+1}-\sqrt{\sqrt{5}-1}$$
   jest liczbą niewymierną?

4. Wiedząc, że
   $$a+\frac{1}{a}\in C \quad \text{wykażyże} \quad a^3+\frac{1}{a^3}\in C$$

5. Wysokość w trójkącie dzieli bok na odcinki, których długości są równe 2 i 3. Kąty trójkąta leżące przy tych odcinkach oznaczamy odpowiednio β i α. Oblicz wartość wyrażenia:
   $$\frac{1-\frac{1}{\cos^2\alpha}}{1-\frac{1}{\cos^2\beta}}$$

Klasy II

1. Rozwiązać równanie:
   $[\ x^3\ ] + [\ x^2\ ] + [\ x\ ] = \{\ x\ \} - 1$,
   gdzie [x] oznacza część całkowitą liczby x,
   { x } część ułamkową
   $(x = [\ x\ ] + \{\ x\ \})$.

2. Znaleźć wszystkie liczby całkowite x, dla których $x^4 + 1$ jest podzielne przez x + 4.

3. Udowodnij tożsamość:
   $$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha \quad .$$

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wie4rzchołku A ma miarę 90^0 oraz |AB|≠|AC|. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, w taki sposób, że AFDE jest kwadratem. Wykazać, że prosta BC, prosta FE oraz styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecinają się w jednym punkcie.

5. Z Warszawy Centralnej do Bielska – Białej wyjeżdża pociąg pospieszny. Po 30 minutach z Bielska – Białej do Warszawy Centralnej odjeżdża pociąg Inter City. Pociągi spotykają się po 2 godzinach. Wiadomo, że pociąg Inter City pokonuje całą trasę w czasie o godzinę krótszym niż pociąg pospieszny. Oblicz, jaki jest czas przejazdu każdego z pociągów.

Klasy III

1. Rozwiąż równanie:
   $$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$$

2. Oblicz:
   $$5^{\log_3 7}-7^{\log_3 5}$$

3. Długości boków pewnego trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi. Kąty wewnętrzne tego trójkąta mają tę własność, że miara kąta największego jest dwukrotnością miary kata najmniejszego. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

4. Sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki trzech skośnych krawędzi tego sześcianu. Oblicz pole tego przekroju, jeśli sześcian ma bok a.

5. Oblicz, iloma zerami kończy się zapis dziesiętny liczby 2007!.