

VI Powiatowa Olimpiada Matematyczna

Etap II (09.01.10 – 05.02.10)

Klasa I

1. Odległość środków dwóch okręgów o promieniach długości R_1 i R_2 jest równa $R_1 + R_2$. Oblicz długość promienia okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i do wspólnej stycznej zewnętrznej tych okręgów.
2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ułamek $\frac{5n+3}{3n+2}$ jest nieskracalny.
3. Wykaż, że w żadnym trójkącie jego dwie dwusieczne kątów nie są prostopadłe.
4. Wykresem funkcji f jest prosta przechodząca przez punkty $A(0,3)$ i $B(-2,1)$. Wyznacz wzór funkcji f oraz rozwiąż nierówność $f(|2x+1|) \leq 13 - 3x$.

Klasa II

1. Napisz równanie krzywej będącej zbiorem środków wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ i stycznych do prostej $x = 0$.
2. Liczby a_1, a_2, \dots, a_n są wyrazami ciągu geometrycznego. Wykaż, że:

$$S_n = a_1 \cdot a_n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right),$$

gdzie S_n jest sumą n początkowych wyrazów tego ciągu.

3. Rozwiąż równanie $\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x} = 3$.
4. Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzi nierówność:
$$3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha \leq 5.$$

Klasa III

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^{\log_y z} + z^{\log_y x} = 512 \\ y^{\log_z x} + x^{\log_z y} = 8 \\ z^{\log_x y} + y^{\log_x z} = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Suma współczynników trzech początkowych wyrazów rozwinięcia potęgi $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ jest równa 46. Znajdź wyraz rozwinięcia, w którym nie występuje x .
3. Łódź musi popłynąć 60 km w dół rzeki, a następnie 10 km w górę rzeki. Prędkość prądu rzeki wynosi 5 km/h. Jaka powinna być prędkość własna łodzi, aby podróż nie trwała dłużej niż 10 godzin?
4. Rozwiąż nierówność:

$$(x - 4)\sqrt{x + 1} < 4 - 2x.$$