

VI Powiatowa Olimpiada Matematyczna

Etap I (01.12.09 – 08.01.10)

Klasa I

1. Oblicz:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-2} - \frac{1}{2-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}-10}.$$

2. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych

(x, y) takie, że $NWD(x, y) = 6$

i $NWW(x, y) = 360$.

3. Wykaż, że połowa sumy długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości środkowej opuszczonej na trzeci bok.

4. W dwóch zbiornikach Z_1 i Z_2 znajduje się woda. Ze zbiornika Z_1 przepompowano do zbiornika Z_2 tyle wody, że ilość wody w Z_2 się podwoiła się. Następnie ze zbiornika Z_2 przepompowano do zbiornika Z_1 tyle wody, że ilość wody w Z_1 potroiła się. Okazało się wówczas, że w obu zbiornikach jest po 450 litrów wody. Oblicz, ile wody było na początku w każdym zbiorniku.

Klasa II

1. Z dwóch sąsiednich wierzchołków kwadratu o boku długości a zakreślono dwa okręgi o promieniu a . Łuki tych okręgów dzielą kwadrat na cztery figury. Oblicz pola tych figur.

2. Wyznacz te wartości parametru m , dla których suma odwrotności pierwiastków równania

$$\frac{mx}{m-2} + \frac{m+2}{x} = x + 2\sqrt{2}$$

jest mniejsza od $\frac{\sqrt{2}}{m-1}$.

3. Po zmodernizowaniu linii kolejowej przeciętna prędkość pociągów ekspresowych kursujących na 400 km trasie wzrosła o 20 km/h, a czas podróży skrócił się o godzinę. Oblicz, z jaką przeciętną prędkością jeżdżą obecnie pociągi ekspresowe na tej trasie?

4. Znajdź sumę n początkowych wyrazów ciągu 3, 33, 333, 3333,

Klasa III

1. Na okręgu o promieniu długości r opisano trapez równoramienny. Punkt styczności dzieli ramię trapezu na odcinki, których długości są w stosunku 1: 2. Obliczyć długość promienia okręgu opisanego na tym trapezie.

2. Znajdź zbiór wszystkich wartości parametru a , dla których równanie

$$\log_4 3 - \log_2(x+3) = a$$

ma rozwiązanie należące do przedziału $(3,4)$.

3. Dla jakich wartości parametru m równanie

$$m^2(1 - \sin x) - 4m + \sin x + 1 = 0$$

ma rozwiązanie?

4. Rozwiąż równanie :

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+13} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+22}.$$