II etap (od 8 stycznia do 11 lutego 2011r.)

KLASY I

1. Niech A, B, C, D będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij, że: $(A\setminus B)\setminus(C\setminus D)\subset(A\setminus C)\cup(D\setminus B)$.

2 Sprawdzić słuszność wzorów dla dowolnych $x, y\in R$:

$$max\{x, y\}=\frac{|x-y|+x+y}{2}$$

$$min\{x, y\}=\frac{x+y-|x-y|}{2}$$

3. Dany jest prostokąt o wymiarach 32 na 33 . Znajdź podział tego prostokąta na dziewięć rozłącznych kwadratów, z których każdy ma inne pole.

4. Pokazać, że funkcja nieparzysta określona wzorem $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ jest rosnąca .

KLASY II

1. W szkole liczącej 1998 uczniów jest n dziewcząt. $(n<1998)$
Dziewczyna D_1 ma powodzenie u 7 chłopców tej szkoły, dziewczyna $D_2-u\,8, D_3-u\,9, \dots,$ dziewczyna D_n ma powodzenie u wszystkich chłopców z tej szkoły.
Oblicz ilu chłopców uczęszcza do tej szkoły.

2. Dla jakich wartości parametru m równanie: $x^2-2\mathrm{m}|x|+3\mathrm{m}-2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

3. Środki kolejnych boków trapezu równoramiennego połączono odcinkami.
Udowodnij, że suma pól powstałych w ten sposób czterech trójkątów jest równa polu powstałego czworokąta.

4. Trójkąt równoramienny o obwodzie długości k obraca się wokół podstawy.
Jakie powinny być długości boków tego trójkąta, aby objętość powstałej bryły była największa?

KLASY III

1. Czy zbiór $H=\{\frac{n^2+2\mathrm{n}-3}{n+1}: n\in N\}$ jest ograniczony?

2. Pokaż, że liczba $\sqrt{n(n+1)}$ jest niewymierna dla każdego $n\in N$.

3. W model stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym, włożono kulę o promieniu długości R i nalano wody zatapiając ją (stożek ustawiamy wierzchołkiem w dół). Powierzchnia wody jest styczna do kuli.
Oblicz odległość powierzchni wody od wierzchołka stożka po wyjęciu kuli.
Czy wlana woda wystarczy na wypełnienie czworościanu foremnego o krawędzi długości 2R?

4. Rozwiąż nierówność: $5^x+\frac{(5^x-5)(5^x+5)}{1-5^x}>0$.

VII Powiatowa Olimpiada Matematyczna
Zespół Szkół Ponadgimnazjalnych Nr 1 w Wejherowie