

I etap (od 1 grudnia 2010 do 7 stycznia 2011r.)

KLASY I

1. Czy liczba $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$ jest liczbą wymierną?
2. Wykresy funkcji $y = -|x| + 2$ i $y = |x| - 2$ wycinają z kwadratu ABCD figurę F. Oblicz jej pole, jeśli wiadomo, że $A = (3;3)$ $B = (3; -3)$ $C = (-3;-3)$ $D = (-3; 3)$
3. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic koła wpisanego w ten trójkąt i koła opisanego na tym trójkącie.
4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{aligned}x^2 + 2y^2 - 2yz &= 100 \\ 2xy - z^2 &= 100\end{aligned}$$

KLASY II

1. Rozwiąż równanie $(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\dots+(x^2+19x+37)+(x^2+20x+39)=810$.
2. Wykaż, że jeżeli wysokości trójkąta o długościach h_1, h_2, h_3 spełniają równanie $(h_1 h_3)^2 + (h_2 h_3)^2 = (h_1 h_2)^2$, to ten trójkąt jest prostokątny.
3. Wyznacz wszystkie liczby czterocyfrowe postaci AABB, które są kwadratami liczb naturalnych.
4. Z sześcianu o krawędzi długości a odcinamy naroża tak, że wszystkie krawędzie otrzymanej bryły mają jednakową długość, a jej ściany są wielokątami foremnymi. Oblicz objętość tej bryły.

KLASY III

1. Przekątna prostopadłościanu tworzy ze ścianami o wspólnym wierzchołku kąty α, β, γ . Wykaż, że:

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma) &= 1 \\ \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) &= 2\end{aligned}$$

2. Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego spełniony jest warunek: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$

3. Znajdź wartość ułamka: $\frac{x^4}{x^8 - x^4 + 1}$, jeśli $\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{7}$.

4. Określ funkcję, która każdemu argumentowi $m \in R$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania:

$$(m-1) \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + (m+2) = 0.$$