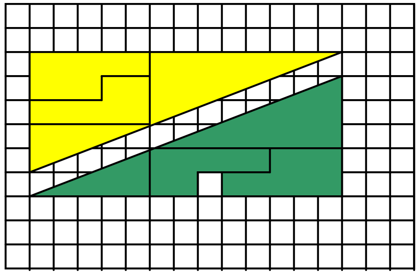
II etap (od 6 stycznia 2005r do 4 lutego 2005r)

Klasy I (i równorzędne)

1. Podaj wszystkie funkcje *f: R→R* takie, że $2f(x)+f(1-x)=x^2$
2. Popatrz na rysunek:



Wydaje się, że zielona i żółta figura mają różne pola. Ale przecież obie figury zbudowane są z jednakowych części, zatem ich pola są równe. Wyjaśnij ten paradoks.

3. Rozwiąż równanie
$$\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2},$$
gdzie $[a]$ jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą a.
4. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie *ABC* odcinek AA_1 jest środkową, to
$$\vec{AA_1}=\frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2}.$$
5. Wiadomo, że trawa na całym polu rośnie jednakowo gęsto i szybko. *60* krów zjada trawę w ciągu *24* dni, a *30* krów w ciągu *60* dni. Ile krów będzie zjadało trawę w ciągu *100* dni?

Klasy II (i równorzędne)

1. Podaj wszystkie funkcje *f: R→R* takie, że $3f(1+x)-f(2-x)=2x^2$
2. Znajdź wszystkie liczby całkowite *x*, dla których wyrażenie
$$\frac{7x+1}{3x+4}$$
ma wartość całkowitą.
3. Przekątna A_1C prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tworzy z jego krawędziami CC_1, CD, CB kąty odpowiednio α, β, γ. Oblicz sumę $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$.
4. Wykazać, że jeżeli x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu ax^3+bx^2+cx+d, gdzie $a\neq 0$ to:
$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a},$$
$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{d}{a}$$
5. Dana jest funkcja
$$y=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2}$$
Naszkicuj wykres tej funkcji, a następnie rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2}\geq 6$.

Klasy III (i równorzędne)

1. Rozwiąż w zbiorze liczb całkowitych równanie $2^x+3=5^y$
2. W turnieju szachowym wzięło udział 2004 zawodników. Każdy rozegrał z każdym jedną partię i nie zanotowano remisów. Zawodnik z numerem *k* (dla *k=1,2,...,2004*) wygrał w turnieju x_n partii, a przegrał y_n partii. Wykaż, że
$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2004}^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{2004}^2$$
3. Wykaż, że w trójkącie o bokach długości *a, b, c* i wysokościach o długości odpowiednio h_a, h_b, h_c zachodzi równość
$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(h_a+h_b+h_c)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$
4. Udowodnij, że jeżeli ściany czworościanu są trójkątami przystającymi, to suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego *M* tego czworościanu od jego ścian jest stała (tzn. nie zależy od wyboru punktu *M*).
5. Z miejscowości *A* i *B* wyszli jednocześnie dwaj turyści idący ze stałymi prędkościami. Pierwszy przeszedł drogę z *A* do *B* i wrócił, drugi przeszedł drogę z *B* do *A* i wrócił zaraz do *B*. Turyści minęli się pierwszym razem *a km* od *A*, drugim w odległości *b km* od *B*. Jaka jest odległość z *A* do *B*?

I Powiatowa Olimpiada Matematyczna

Zespół Szkół Ponadgimnazjalnych nr 1, 84-200 Wejherowo, ul. Bukowa 1