I etap (od 1 grudnia do 5 stycznia 2005r.)

Klasy I (i równorzędne)

1. Dane są odcinki o długości a, b, c. Zbudować odcinek x, którego długość spełnia równanie:
$$\frac{x^2}{a^2 \cdot b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$$
2. Rozstrzygnij, która z liczb jest większa
$$22^{55} \quad czy \quad 55^{22}.$$
3. Wiedząc, *że* $9^n+9^{-n}=a$ oblicz:
   a) 3^n+3^{-n} b) 81^n+81^{-n}
4. Dwie grupy turystów wyruszają jednocześnie z miejscowości *A* do miejscowości ***B*** oddalonych o *s km*. Pierwsza grupa idzie początkowo pieszo z prędkością $v\frac{km}{h}$. Druga grupa jedzie początkowo autobusem z prędkością $u\frac{km}{h}$, po przejechaniu pewnego odcinka drogi kontynuuje dalej podróż pieszo z prędkością $v\frac{km}{h}$, a autobus zawraca i jedzie w kierunku miejscowości ***A*** do spotkania z pierwszą grupą, a następnie wiezie ją w kierunku miejscowości ***B***. Obie grupy przybywają jednocześnie. Obliczyć czas, w jakim każda z tych grup przebyła drogę z ***A*** do ***B***.
5. Oblicz wartość ułamka
$$\frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134}$$

Klasy II (i równorzędne)

1. Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne są rozwiązaniem układu równań:
$$\begin{cases} \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} = 0 \\ x^2 = x \cdot |x| \end{cases}$$
2. Rozłóż na czynniki
$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3.$$
3. Udowodnij, że jeżeli wielomian $W(x)=x^3+ax+b$ ma pierwiastek podwójny, to $4a^3+27b^2=0$.
4. Maszynistka przepisywała po dwie strony dziennie rękopisu więcej niż przewidywała i dzięki temu przepisała go 3 dni przed terminem. Gdyby w każdym dniu przepisywała dodatkowo 20% liczby przepisywanych stron, to zaoszczędziłaby jeszcze dwa dni. Ile stron liczył rękopis, a w ilu dniach miał być przepisany?
5. Przez punkt położony wewnątrz trójkąta poprowadzono proste równoległe do boków trójkąta. Proste te dzielą trójkąt na 6 części, z których 3 są trójkątami o polach S_1, S_2, S_3. Wyznaczyć pole danego trójkąta.

Klasy III (i równorzędne)

1. Rozwiąż równanie:
$$tgx + tg2x = 2\sin 2x(1+\sin^2 x + \sin^4 x + ...)$$
2. Wyznacz granicę:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot ... \cdot \frac{(n-1)^2-1}{(n-1)} \cdot \frac{n^2-1}{n^2}$$
3. Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta i $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \sin\gamma$, to trójkąt jest prostokątny.
4. Aleksander pił kawę z pełnej filiżanki w sposób następujący: wypił trochę i zawartość filiżanki uzupełnił mlekiem, następnie znów trochę wypił i dolał do pełna mleka itd., przy czym za każdym razem wypijał 2 razy mniej niż poprzednio, oprócz ostatniego razu, kiedy wypił kawę do dna. Rozstrzygnij czego Aleksander wypił więcej: kawy czy mleka?
5. Dla jakich całkowitych wartości parametru k pierwiastki równania:
$$(k-2)x^2 + (k^2-8)x + k^2 - k - 12 = 0$$
są liczbami całkowitymi?